



Comisión Nacional de Investigación  
Científica y Tecnológica - CONICYT



COMISIÓN NACIONAL DE INVESTIGACION CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

VERSION OFICIAL

FECHA: 18/03/2013

**N° PROYECTO :** 1090016      **DURACIÓN :** 4 años      **AÑO ETAPA :** 2012

**TÍTULO PROYECTO :** A COMBINATORIAL THEORY OF AFFINE SCHUBERT CALCULUS

**DISCIPLINA PRINCIPAL :** OTRAS ESPECIALIDADES DE LAS MATEMATICAS

**GRUPO DE ESTUDIO :** MATEMATICAS

**INVESTIGADOR(A) RESPONSABLE :** LUC LAPOINTE

**DIRECCIÓN :** [REDACTED]

**COMUNA :**

**CIUDAD :** Talca

**REGIÓN :** VII REGION

**FONDO NACIONAL DE DESARROLLO CIENTIFICO Y TECNOLOGICO (FONDECYT)**

Moneda 1375, Santiago de Chile - casilla 297-V, Santiago 21

Telefono: 2435 4350 FAX 2365 4435

Email: informes.fondecyt@conicyt.cl

# INFORME FINAL

## PROYECTO FONDECYT REGULAR

### OBJETIVOS

Cumplimiento de los Objetivos planteados en la etapa final, o pendientes de cumplir. Recuerde que en esta sección debe referirse a objetivos desarrollados, NO listar actividades desarrolladas.

Nº	OBJETIVOS	CUMPLIMIENTO	FUNDAMENTO
1	Encontrar una noción de carga sobre los $k$ -tableaux y demostrar su compatibilidad con un cierto orden parcial sobre las $k$ -formas.	TOTAL	Artículo central de la tesis de doctorado de María Elena Pinto
2	Establecer una conexión entre la teoría de campos superconforme y los polinomios de Jack en el superespacio	TOTAL	Artículo publicado en JHEP

Otro(s) aspecto(s) que Ud. considere importante(s) en la evaluación del cumplimiento de objetivos planteados en la propuesta original o en las modificaciones autorizadas por los Consejos.

--

## RESULTS OBTAINED:

For each specific goal, describe or summarize the results obtained. Relate each one to work already published and/or manuscripts submitted. In the Annex section include additional information deemed pertinent and relevant to the evaluation process. **The maximum length for this section is 5 pages. (Arial or Verdana, font size 10).**

Generalizations of Schur functions, called  $k$ -Schur functions, are known to be related to Schubert classes of affine Grassmannians. One of our main goals was to exploit the novel combinatorics of  $k$ -Schur functions to develop a combinatorial theory associated to Schubert calculus on affine Grassmannians.

A fundamental requirement to exploit the combinatorics of  $k$ -Schur functions was to understand the branching coefficients, that is the decomposition of  $k$ -Schur functions into  $(k - 1)$ -Schur functions (this provides as a consequence decomposition formulas for Schubert classes of the affine Grassmannians). It was shown recently (Lam, T.; Lapointe, L.; Morse, J.; Shimozono, M. *The poset of  $k$ -shapes and branching rules for  $k$ -Schur functions*, Mem. Amer. Math. Soc. **223**, no. 1050 (2013)) that the branching coefficients are given by paths in a poset on a certain type of partitions called  $k$ -shapes. The main ingredient in this construction was a bijection, called the weak bijection, that associates to a  $k$ -tableau a pair made out of a  $(k - 1)$ -tableau and a path in the poset of  $k$ -shapes. We define in (Lapointe, L., Pinto, M. E.; *Charge on tableaux and the poset of  $k$ -shapes*, submitted to the Journal of Combinatorial Theory Series A) a concept of charge on  $k$ -tableaux (which conjecturally gives a combinatorial interpretation for the expansion coefficients of Hall-Littlewood polynomials into  $k$ -Schur functions), and show that it is compatible in the standard case with the weak bijection. As a first step towards the generalization to the non-standard case, we introduce a Lascoux-Schutzenberger type action of the symmetric group on  $k$ -tableaux and conjecture that it also compatible with the weak bijection.

Another of our main goals these last few years has been to study symmetric functions in superspace. We introduced about 10 years ago Jack polynomials in superspace, which are eigenfunctions of the generalization to superspace of the Calogero-Sutherland model. We published last year an article in which evaluation and normalization formulas are presented (Desrosiers, P., Lapointe, L., Mathieu, P.; *Evaluation and Normalization of Jack superpolynomials*, IMRN **23**, 5267–5327 (2012)). The formulas obtained in this article were instrumental to connect the Jack polynomials in superspace with the super Virasoro algebra (Desrosiers, P., Lapointe, L., Mathieu, P.; *Jack polynomials with negative fractional parameter: clustering properties and super Virasoro ideals*, Commun. Math. Phys. **316**, 395–440 (2012)). In the latter

article, we also obtained clustering properties (generalizations of the Pauli exclusion principle in which clusters of  $k$  particles are allowed while those of  $k + 1$  particles are forbidden) for the Jack polynomials in superspace. Finally, a deep connection was made between Jack polynomials in superspace and superconformal field theory (Desrosiers, P., Lapointe, L., Mathieu, P.; *Superconformal field theory and Jack superpolynomials*, JHEP **1209**, 037 (2012)): it appears that the singular vectors of the super Virasoro algebra, as well as the (degenerate) Whittaker vectors, can be given explicitly as simple sums of Jack polynomials in superspace. This suggests that the Jack polynomials in superspace will play in superconformal field theory the role played by the Jack polynomials in conformal field theory (for instance in the proof of the AGT conjectures relating supersymmetric gauge theory in 4 dimensions with conformal field theory in 2 dimensions).

We have been able to understand what was to us the big open problem regarding symmetric functions in superspace: define the Macdonald polynomials in superspace. In (Blondeau-Fournier, O., Desrosiers, P., Lapointe, L., Mathieu, P.; *Macdonald polynomials in superspace: conjectural definition and positivity conjectures*, Lett. Math. Phys. **101**, 27–47 (2012)) we conjectured the existence of a family of polynomials in superspace generalizing the Macdonald polynomials. These polynomials were defined through certain triangularity and orthogonality relations, but the existence of the polynomials remained to be proven. We later proved the existence, using commuting operators built out of Cherednik operators, in (Blondeau-Fournier, O., Desrosiers, P., Lapointe, L., Mathieu, P.; *Macdonald polynomials in superspace as eigenfunctions of commuting operators*, Journal of Combinatorics **3**, no. 3, 495–562 (2012) in a special issue in honor of Adriano Garsia). What is to me the most remarkable (and certainly the most unexpected) feature of the Macdonald polynomials in superspace is that they provide a refinement of the Macdonald positivity conjectures, that is,  $(q, t)$ -Kostka polynomials are sums of  $(q, t)$ -Kostka polynomials in superspace. We are currently trying to see whether the extra structure in superspace can shed light on the famously difficult combinatorics of the  $(q, t)$ -Kostka polynomials. We have shown in particular (Blondeau-Fournier, O., Lapointe, L., Mathieu, P.; *From Macdonald polynomials to their hyperoctahedral extension: the superspace bridge*, arXiv:1211:3186) that when the fermionic degree is large enough, the positivity of the  $(q, t)$ -Kostka polynomials in superspace holds. In this case a Macdonald polynomial in superspace is associated to a product of usual Macdonald polynomials and the corresponding  $q, t$ -Kostka coefficients are bigraded versions of the regular representation of the hyperoctahedral group  $B_n$ .

# PRODUCTOS

## ARTÍCULOS

Para trabajos en Prensa/ Aceptados/Enviados adjunte copia de carta de aceptación o de recepción.

**Nº :** 1  
**Autor (a)(es/as) :** Lam, T.; Lapointe, L.; Morse, J.; Shimozone, M.  
**Nombre Completo de la Revista :** Memoirs of the American Mathematical Society  
**Título (Idioma original) :** The poset of k-shapes and branching rules for k-Schur functions  
**Indexación :** ISI  
**ISSN :**  
**Año :** 2013  
**Vol. :** 223  
**Nº :** 1050  
**Páginas :** 101  
**Estado de la publicación a la fecha :** Publicada  
**Otras Fuentes de financiamiento, si las hay :**

CONICYT: ACT56 Lattices and Symmetry (Lapointe). NSF (Lam, Morse, Shimozone)
---

**Envía documento en papel :** no

**Archivo(s) Asociado(s) al artículo :**

kshape.pdf

[http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4\\_articulos/descarga/14762391/1090016/2012/33644/1/](http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4_articulos/descarga/14762391/1090016/2012/33644/1/)

---

**Nº :** 2  
**Autor (a)(es/as) :** Desrosiers, P.; Lapointe, L.; Mathieu, P.  
**Nombre Completo de la Revista :** International Mathematics Research Notices  
**Título (Idioma original) :** Evaluation and normalization of Jack superpolynomials  
**Indexación :** ISI  
**ISSN :** doi:10.1093/imrn/rnr  
**Año :** 2012  
**Vol. :** 23  
**Nº :**  
**Páginas :** 5267-5327  
**Estado de la publicación a la fecha :** Publicada  
**Otras Fuentes de financiamiento, si las hay :**

CONICYT (anillo ACT56) y CRSNG (Canadá)
---

**Envía documento en papel :** no

**Archivo(s) Asociado(s) al artículo :**

SuperEvalNorme.pdf

[http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4\\_articulos/descarga/14762391/1090016/2012/33646/1/](http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4_articulos/descarga/14762391/1090016/2012/33646/1/)

---

**Nº :** 3  
**Autor (a)(es/as) :** Blondeau-Fournier, O.; Desrosiers, P.; Lapointe, L.; Mathieu, P.  
**Nombre Completo de la Revista :** Letters in Mathematical Physics  
**Título (Idioma original) :** Macdonald polynomials in superspace: conjectural definition and positivity conjectures  
**Indexación :** ISI  
**ISSN :** DOI: 10.1007/s11005-  
**Año :** 2012  
**Vol. :** 101

**Nº :**

**Páginas :** 27-47

**Estado de la publicación a la fecha :** Publicada

**Otras Fuentes de financiamiento, si las hay :**

CONICYT (anillo ACT56 y RED4), CRSNG (Canadá) y FQRNT (Quebec)

**Envía documento en papel :** no

**Archivo(s) Asociado(s) al artículo :**

SuperMacdo.pdf

[http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4\\_articulos/download/14762391/1090016/2012/33647/1/](http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4_articulos/download/14762391/1090016/2012/33647/1/)

---

**Nº :** 4

**Autor (a)(es/as) :** Desrosiers, P.; Lapointe, L. ; Mathieu, P.

**Nombre Completo de la Revista :** Communications in Mathematical Physics

**Título (Idioma original) :** Jack superpolynomials with negative fractional parameter: clustering properties and super-Virasoro ideals

**Indexación :** ISI

**ISSN :**

**Año :** 2012

**Vol. :** 316

**Nº :**

**Páginas :** 395-440

**Estado de la publicación a la fecha :** Enviada

**Otras Fuentes de financiamiento, si las hay :**

CONICYT (anillo ACT56) y CRSNG (Canadá)

**Envía documento en papel :** no

**Archivo(s) Asociado(s) al artículo :**

clustering.pdf

[http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4\\_articulos/download/14762391/1090016/2012/33648/1/](http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4_articulos/download/14762391/1090016/2012/33648/1/)

---

**Nº :** 5

**Autor (a)(es/as) :** Blondeau-Fournier, O.; Desrosiers, P. ; Lapointe, L.; Mathieu, P.

**Nombre Completo de la Revista :** Journal of Combinatorics

**Título (Idioma original) :** Macdonald polynomials in superspace as eigenfunctions of commuting operators

**Indexación :** Otras Revistas  
**ISSN :**  
**Año :** 2012  
**Vol. :** 3  
**Nº :** 3  
**Páginas :** 495-562

**Estado de la publicación a la fecha :** Publicada

**Otras Fuentes de financiamiento, si las hay :**

CONICYT (anillo ACT56), CRSNG (Canadá) y FQRNT (Quebec)

**Envía documento en papel :** no

**Archivo(s) Asociado(s) al artículo :**

MacdoOP.pdf

[http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4\\_articulos/descarga/14762391/1090016/2012/33649/1/](http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4_articulos/descarga/14762391/1090016/2012/33649/1/)

---

**Nº :** 6

**Autor (a)(es/as) :** Desrosiers, P.; Lapointe, L.; Mathieu, P.

**Nombre Completo de la Revista :** Journal of High Energy Physics

**Título (Idioma original) :** Superconformal field theory and Jack superpolynomials

**Indexación :** ISI

**ISSN :**

**Año :** 2012

**Vol. :** 1209

**Nº :** 37

**Páginas :** 43

**Estado de la publicación a la fecha :** Publicada

**Otras Fuentes de financiamiento, si las hay :**

CONICYT (anillo ACT56) y CRSNG (Canadá)

**Envía documento en papel :** no

**Archivo(s) Asociado(s) al artículo :**

Superconformal.pdf

[http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4\\_articulos/descarga/14762391/1090016/2012/33753/1/](http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4_articulos/descarga/14762391/1090016/2012/33753/1/)

---

**Nº :** 7

**Autor (a)(es/as) :** Lapointe, L.; Pinto, M. E.

**Nombre Completo de la Revista :** Journal of Combinatorial Theory Series A

**Título (Idioma original) :** Charge on tableaux and the poset of k-shapes

**Indexación :** ISI

**ISSN :**

**Año :**

**Vol. :**

**Nº :**

**Páginas :**

**Estado de la publicación a la fecha :** Enviada

**Otras Fuentes de financiamiento, si las hay :**

CONICYT (anillo ACT56) y NSF

---

**Envía documento en papel :** no

**Archivo(s) Asociado(s) al artículo :**

ChargePoset.pdf

[http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4\\_articulos/descarga/14762391/1090016/2012/33762/1/](http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4_articulos/descarga/14762391/1090016/2012/33762/1/)

JCTAcharge.pdf

[http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4\\_articulos/descarga/14762391/1090016/2012/33762/2/](http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4_articulos/descarga/14762391/1090016/2012/33762/2/)

---

## OTRAS PUBLICACIONES / PRODUCTOS

*Sin información ingresada.*

## CONGRESOS

**N° :** 1

**Autor (a)(es/as) :** Lapointe, L

**Título (Idioma original) :** Funciones simétricas en el superespacio

**Nombre del Congreso :** XXV Jornadas de la zona Sur

**País :** CHILE

**Ciudad :** Concepción

**Fecha Inicio :** 18/04/2012

**Fecha Término :** 20/04/2012

**Nombre Publicación :**

**Año :**

**Vol. :**

**N° :**

**Páginas :**

**Envía documento en papel :** no

**Archivo Asociado :**

Concepcion.pdf

[http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4\\_congresos/descarga/14762391/1090016/2012/50607/1/](http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4_congresos/descarga/14762391/1090016/2012/50607/1/)

---

**N° :** 2

**Autor (a)(es/as) :** Lapointe, L

**Título (Idioma original) :** Stability of bisymmetric Macdonald polynomials and Bn-type combinatorics

**Nombre del Congreso :** LXXXI Encuentro Anual SOMACHI

**País :** CHILE



**Ciudad :** Olmué  
**Fecha Inicio :** 08/11/2012  
**Fecha Término :** 10/11/2012  
**Nombre Publicación :**  
**Año :**  
**Vol. :**  
**Nº :**  
**Páginas :**  
**Envía documento en papel :** no  
**Archivo Asociado :**  
somachilapointe.pdf  
[http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4\\_congresos/descarga/14762391/1090016/2012/50612/1/](http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4_congresos/descarga/14762391/1090016/2012/50612/1/)

---

## TESIS/MEMORIAS

**Nº :** 1  
**Título de Tesis :** Carga y orden parcial de las k-formas  
**Nombre y Apellidos del(de la) Alumno(a) :** María Elena Pinto Araya  
**Nombre y Apellidos del(de la) Tutor(a) :** Luc Lapointe  
**Título Grado :** Doctorado  
**Institución :** Universidad de Talca  
**País :** CHILE  
**Ciudad :** Talca  
**Estado de Tesis :** Terminada  
**Fecha Inicio :** 01/08/2007  
**Fecha Término :** 28/02/2013  
**Envía documento en papel :** no  
**Archivo Asociado :**  
Resumen\_Tesis.pdf  
[http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4\\_tesis\\_memorias/descarga/14762391/1090016/2012/25937/1/](http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4_tesis_memorias/descarga/14762391/1090016/2012/25937/1/)  
Certificado\_Tesis.pdf  
[http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4\\_tesis\\_memorias/descarga/14762391/1090016/2012/25937/2/](http://sial.fondecyt.cl/index.php/investigador/f4_tesis_memorias/descarga/14762391/1090016/2012/25937/2/)

---

## ANEXOS

A continuación se detallan los anexos físicos/papel que no se incluyen en el informe en formato PDF.

--